Zbirka nalog za srednje šole: MATEMATIKA

D. Grašek, M. Kožar, A. Tiegl: ELEMENTARNE FUNKCIJE, KOMPLEKSNA ŠTEVILA
Poglavje VIII.:LOGARITEM

Str.61 Naloge 19 a), 23 a) 25 a) 39 a)
Reši enačbe:

19 a) $\dfrac{\log(x^2+2x+1)}{\log(5x+1)}=1$

23 a) $\log^2 x-\log x^2-3=1$

25 a) $\dfrac{2}{\log x}+\dfrac{1}{5-\log x}-1=0$

39 a) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=11$

Glej tudi naloge na strani 59   3 a) – 3 h) in strani 61   13 a) – 13 č)

Rešiti moramo enačbe, pri katerih velja:

(1) $a^y=x \iff y=\log_a x, \qquad x>0,\ a>0,\ a\neq 1$

(2) $\log_a 1=0$

(3) $\log_a a=1$

(4) $\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$

(5) $\log_a x^n=n\log_a x$

(6) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$

(7) $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

(8) $\log_{10} x=\log x$

(9) $\log_a x=\dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ To je formula za spremembo osnove, kjer je a stara osnova in b nova osnova.

Rešitev

19 a) $\dfrac{\log(x^2+2x+1)}{\log(5x+1)}=1 \qquad /.\log(5x+1)$

Pogoj:
$\log(5x+1)\neq 0$

$\log(x^2+2x+1)=\log(5x+1) \,/\, anti\log$

$x^2+2x+1=5x+1$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

$\underline{x_1=0}$ ne ustreza

$x-3=0$

$\underline{x=3}$ ustreza

Preizkus rešitve:

$x_1 = 0$ Takoj vidim, da je $\log(5x+1) = \log 1 = 0$, kar pa pogoj ne dovoljuje. Zato $x_1 = 0$ ni rešitev in k rešitvi zapišemo: ne ustreza

$x = 3$ $$\frac{\log(9+6+1)}{\log(15+1)}$$

Tu že vidim, da je argument pod obema logaritmoma pozitiven, zato ta rešitev ustreza. To tudi dopišem v rešitev. Vedeti moram, da to ni preizkus enačbe. Lahko ga narediš za vajo.

---

23 a) $\log^2 x - \log x^2 - 3 = 1$

$$(\log x)^2 - 2\log x - 3 = 0$$

Vedeti moram za dogovor, da velja $\log^2 x = (\log x)^2 = \log x \,.\, \log x$.

Po (5) iz teorije poenostavim enačbo ter vpeljem novo neznanko:

$$\log x = t$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$
$$(t-3)(t+1) = 0$$
$$t_1 = 3 \qquad t_2 = -1$$

$\log x = 3$ $\qquad$ $\log x = -1$

$10^3 = x$ $\qquad$ $10^{-1} = x$

$\underline{x_1 = 1000}$ $\qquad$ $\underline{x_2 = \frac{1}{10}}$

(ustreza) $\qquad$ (ustreza)

Po preizkusu rešitve vidim, da sta obe ustrezni, saj sta obe pozitivni, kar zadostuje za $\log x$, kjer mora biti $x > 0$.

---

25 a) $\frac{2}{\log x} + \frac{1}{5 - \log x} - 1 = 0$

$$\frac{2}{1+t} + \frac{1}{5-t} - 1 = 0 \,/(1+t)(5-t) \quad (*)$$

Vpeljem novo neznanko $\log x = t$. Vidim, da bodo vsi x-i, ki so pozitivni ustrezne rešitve. Vendar skozi racionalno enačbo (*) s t – jem dobim nova dodatna pogoja: $t \neq -1$ in $t \neq 5$.

$$1 + t \neq 0$$
$$\underline{t \neq -1}$$

in

$$5 - t \neq 0$$
$$t \neq 5$$

$$2(5-t) + 1 + t - (1+t)(5-t) = 0$$
$$10 - 2t + 1 + t - (5 - t + 5t - t^2) = 0$$
$$11 - t - 5 - 4t + t^2 = 0$$
$$t^2 - 5t + 6 = 0$$
$$(t-2)(t-3) = 0$$

$t_1 = 2$ $\quad\quad\quad$ $t_2 = 3$ $\log x = t$ $\log x = 2$ $\quad\quad$ $\log x = 3$ $10^2 = x$ $\quad\quad$ $10^3 = x$ $\underline{x_1 = 100}$ $\quad\quad$ $\underline{x_2 = 1000}$ ustreza $\quad\quad$ ustreza	Vidim, da ni nobeden od t – jev prepovedan, zato sta oba t – ja ustrezna za rešitev racionalne (*). Vstavim jo v $\log x = t$ in izračunam oba x – a. Obe rešitvi sta pozitivni in tako k obema napišem: ustreza.
39 a) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 11$ $\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{\log_3 3^2} = \frac{\log_3 x}{2}$ po (5) in (3) $\log_{27} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 27} = \frac{\log_3 x}{\log_3 3^3} = \frac{\log_3 x}{3}$ $\log_3 x + \frac{\log_3 x}{2} + \frac{\log_3 x}{3} = 11$ $t + \frac{t}{2} + \frac{t}{3} = 11 / .6$ $6t + 3t + 2t = 66$ $11t = 66$ $\underline{t = 6}$	Tu uporabim (9) ter vse logaritme spravim na isto osnovo – najlaže je na najmanjšo osnovo v nalogi. To je 3. Vstavim v enačbo ter jo rešim. Ugodno je vpeljati novo neznanko, ni pa nujno. $\log_3 x = t$ $\log_3 x = 6$ $3^6 = x$ $\underline{x = 129}$