Zbirka nalog za srednje šole: MATEMATIKA

D. Grašek, M. Kožar, A. Tiegl: ELEMENTARNE FUNKCIJE, KOMPLEKSNA ŠTEVILA
Poglavje VII.:Eksponentna funkcija

Str. 53 in 54, Naloge 16, 17, 22, 23 Reši enačbe:

16a) $4^x = 16$

b) $5^{-x} = 125$

c) $\frac{27}{8} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

č) $3^{-x} = \frac{1}{27}$

d) $2^x = -8$

17a) $4^{1-5x} = 64$

b) $16^{2x+1} = 32$

c) $3^{\frac{3x-7}{2}} = \frac{1}{27}$

č) $2^{x-1} = 4^5$

d) $\left(\frac{5}{4}\right)^{0,8x} = \frac{64}{125}$

e) $9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$

22a) $2^{x-2} = 5^{2-x}$

b) $5^{x-4} = 6^{x-4}$

c) $8^{5-x} = 7^{x-5}$

č) $4^{2x-3} = 7^{x-1,5}$

d) $2^{x^2-7x+12} = 1$

e) $5^{x^2-8x+12} = 1$

23a) $8^x = 1$

b) $3^{x-1} = 1$

c) $\left(\frac{9}{13}\right)^{x+3} = 1$

Str.55, Nal. 31 Ugotovi približno rešitev enačb z grafom. Poskusi določiti točne rešitve, če to gre.

31 a) $3^{-x} = 5$, b) $2^{x-3} = 1$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} = 2$ č) $5^x = 7$

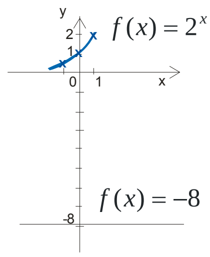
Enačbe eksponentne
Pomni

Rešiti moramo eksponentne enačbe to so enačbe z neznanko v eksponentu.
V osnovi poznamo tri tipe eksponentnih enačb:

(1) $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ (pri enakih osnovah izenačimo eksponent)

(2) $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = 0$ (Pri enakih eksponentih izenačim eksponent z 0)

(3) $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \log a^{f(x)} = \log b$ (osnovi sta različni in eksponenta sta različna, tedaj enačbo logaritmiramo pri najbolj ugodni osnovi)

Rešitev		
16a) $4^x = 16$ $4^x = 4^2$ (zapišem z isto osnovo) $\underline{x = 2}$ (po (1)) Enačbo bi lahko zapisali z osnovo 2: $2^{2x} = 2^4$ $2x = 4$ (po 2)) $\underline{x = 2}$	16b) $5^{-x} = 125$ $5^{-x} = 5^3$ (1) $-x = 3$ $\underline{x = -3}$	16c) $\frac{27}{8} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $\frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ Spravimo na isto osnovo: $\frac{2}{3}$. Pri tem uporabimo pravilo $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ (po (1)) $-3 = x$ $x = -3$
16č) $3^{-x} = \frac{1}{27}$ $3^{-x} = \frac{1}{3^3}$ $3^{-x} = 3^{-3}$ $-x = -3$ $\underline{x = 3}$	d) $2^x = -8$ Enačba nima rešitve	Spomnimo se, da je $f(x) = 2^x$ vedno pozitivna, t.j. njen graf leži v celoti nad x osjo. $f(x) = 2^x$ <table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>-1</td><td>1/2</td></tr></table>  Vidimo, da se grafa $f(x) = 2^x$ in $f(x) = -8$, nikjer ne sekata. Iz tega sklepam, da naša enačba nima rešitve.
17a) $4^{1-5x} = 64$ $4^{1-5x} = 4^3$ (po (1)) $1 - 5x = 3$ $-5x = 2$ $\underline{x = -\frac{2}{5}}$	17b) $16^{2x+1} = 32$ $\left(2^4\right)^{2x+1} = 2^5$ $2^{8x+4} = 2^5$ $8x + 4 = 5$ $8x = 1$ $\underline{x = \frac{1}{8}}$	17c) $3^{\frac{3x-7}{2}} = \frac{1}{27}$ $3^{\frac{3x-7}{2}} = 3^{-3}$ (po (1)) $\frac{3x-7}{2} = -3 / .2$ $3x - 7 = -6$ $3x = 1$ $\underline{x = \frac{1}{3}}$

17č) $2^{x-1}=4^5$ $2^{x-1}=2^{10}$ $x-1=10$ $\underline{x=11}$	17d) $\left(\frac{5}{4}\right)^{0,8x}=\frac{64}{125}$ $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{8x}{10}}=\frac{4^3}{5^3}$ $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{4x}{5}}=\left(\frac{4}{5}\right)^3$ $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{4x}{5}}=\left(\frac{5}{4}\right)^{-3}$ (1) $\frac{4x}{5}=-3/.5$ $4x=-15$ $\underline{x=-\frac{15}{4}=-3\frac{3}{4}}$	17e) $9^{-3x}=\left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$ $(3^2)^{-3x}=\left(\frac{1}{3^3}\right)^{x+3}$ $3^{-6x}=(3^{-3})^{x+3}$ $-6x=-3x-9$ $-3x=-9$ $\underline{x=3}$

17f) $\left(\frac{1}{0,125}\right)^{2x}=128$ $\qquad (128=4.32=2^2 2^5=2^7)$

$$\left(\frac{1}{\frac{125}{1000}}\right)^{2x}=2^7$$

$$\left(\frac{1000}{125}\right)^{2x}=2^7$$

$$8^{2x}=2^7$$

$2^{6x}=2^7$ (po (10))

$$6x=7$$

$$x=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$$

22a) $2^{x-2}=5^{2-x}$

Ker ne morem enačbe zapisati z isto osnovo, poskusim pokazati, da je eksponent na levi enak eksponentu na desni

$$2^{x-2}=5^{-(-2+x)}$$

$$2^{x-2}=\left(5^{-1}\right)^{x-2}$$

$$2^{x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}$$

Eksponenta sta enaka, zato ju po (2) izenačin z 0.

$$x-2=0$$

$$\underline{x=2}$$

22b) $5^{x-4}=6^{x-4}$

$$x-4=0$$

$$\underline{x=4}$$

22c) $8^{5-x}=7^{x-5}$

$$8^{5-x}=7^{-(-x+5)}$$

$$8^{5-x}=\left(7^{-1}\right)^{5-x}$$

$$5-x=0$$

$$\underline{x=5}$$

22č) $4^{2x-3}=7^{x-1,5}$

$$4^{2x-3}=7^{x-\frac{3}{2}}$$

$$4^{2x-3}=7^{\frac{2x-3}{2}}$$

$$4^{2x-3}=\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{2x-3}$$

$$4^{2x-3}=\left(\sqrt{7}\right)^{2x-3} \quad po(2)$$

$$2x-3=0$$

$$\underline{x=\frac{3}{2}}$$

22d) $2^{x^2-7x+12}=1$

$$2^{x^2-7x+12}=2^0 \quad po(2)$$

Vemo, da je $a^0=1$. Torej lahko namesto 1 napišemo: $1=2^0=3^0=...=b^0$

$$x^2-7x+12=0$$

$$(x-4)(x-3)=0$$

$$x_1=4$$

$$\underline{x_2=3}$$

22e) $5^{x^2-8x+12}=1$

$$5^{x^2-8x+12}=5^0 \quad po(2)$$

$$x^2-7x+12=0$$

$$(x-6)(x-2)=0$$

$$x_1=6$$

$$\underline{x_2=2}$$

23a) $8^x=1$

$$8^x=8^0$$

$$\underline{x=0}$$

23b) $3^{x-1}=1$

$$3^{x-1}=3^0$$

$$x-1=0$$

$$\underline{x=1}$$

23c) $\left(\frac{9}{13}\right)^{x+3}=1$

$$\left(\frac{9}{13}\right)^{x+3}=\left(\frac{9}{13}\right)^0$$

$$x+3=0$$

$$\underline{x=-3}$$

Nal. 31 Ugotovi približno rešitev enačb z grafom. Poskusi določiti točne rešitve, če to gre.

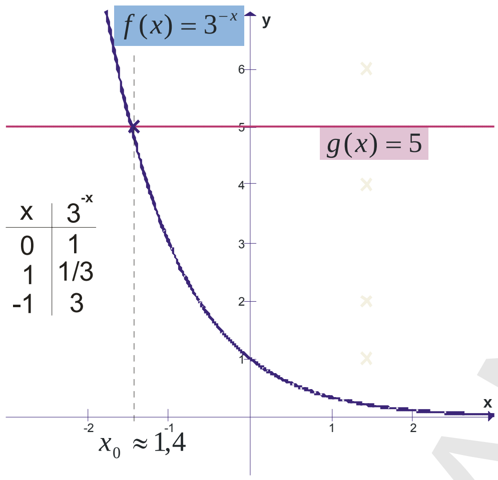
31a) $3^{-x}=5$, b) $2^{x-3}=1$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}=2$ č) $5^{x}=7$

Grafični enačbe rešujemo tako, da levo in desno stran vzamemo za funkcijo. Nato vsako posebej narišemo in odčitamo presečišče.

31a) $3^{-x}=5$

Reši grafično in računsko

GRAFIČNO:



x	3^{-x}
0	1
1	1/3
-1	3

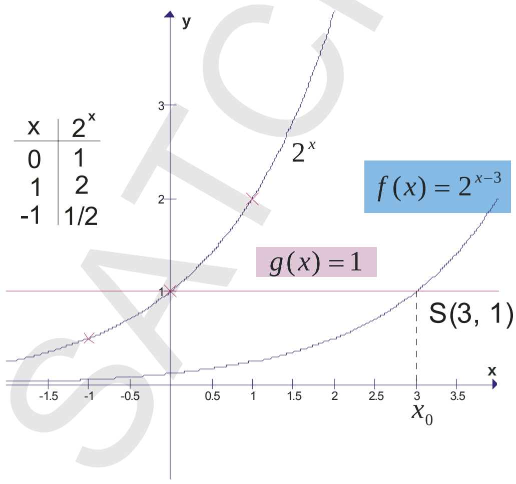
RAČUNSKO:

$$3^{-x}=5 / \log_5 \quad po(3)$$
$$\log_5 3^{-x}=\log_5 5$$
$$-x\log_5 3=1/(-1)$$
$$x\log_5 3=-1/:\log_5 3$$
$$x=-\frac{1}{\log_5 3}$$
$$x=-\frac{1}{\frac{\log 3}{\log 5}}=-\frac{\log 5}{\log 3}$$
$$\underline{x\approx -1{,}4307}$$

Navodilo: Enačbo logaritmiramo pri osnovi 5, nato pa to spremenimo na osnovo 10. Tako rešitve iz grafa preverimo tudi »računsko«.

31b) $2^{x-3}=1$

GRAFIČNO:



x	2^x
0	1
1	2
-1	1/2

RAČUNSKO:

$$2^{x-3}=1$$
$$2^{x-3}=2^0 \quad \text{po (1)}$$
$$x-3=0$$
$$\underline{x=3}$$

2^x premaknemo za 3 desno, da dobimo 2^{x-3}.
Odčitamo presečišče S(3, 1). x_0 od presečišča je rešitev naše načbe

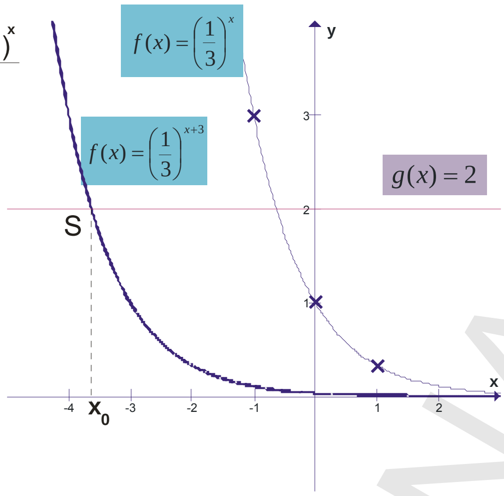
31c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}=2$

Reši grafično in računsko

GRAFIČNO:

$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}$

x	$(1/3)^x$
0	1
1	1/3
-1	3



$\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ premaknemo za 3 v levo, da dobimi

$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}$. Odčitamo $x_0\approx -3{,}6$ od

presečišča S, kar je približna rešitev naše enačbe.

RAČUNSKO:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}=2$ /log po (3) logaritmiram pri osnovi 10

$\log\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}=\log 2$

$(x+3)\log\left(\frac{1}{3}\right)=\log 2 / :\log\left(\frac{1}{3}\right)$

$x+3=\frac{\log 2}{\log\frac{1}{3}}-3$

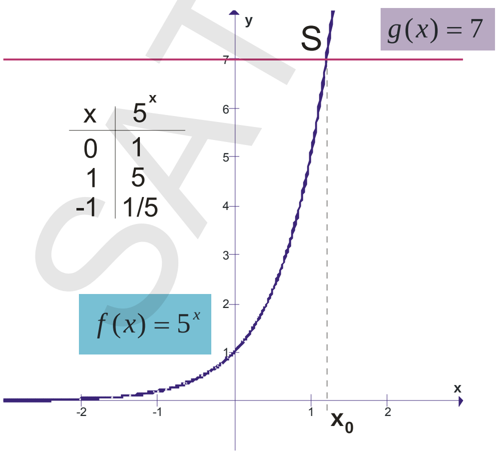
$\underline{x\approx -3{,}6309}$

31č) $5^x=7$

Reši računsko in grafično

GRAFIČNO:

x	5^x
0	1
1	5
-1	1/5



Odčitani x_0 je rešitev naše enačbe

RAČUNSKO:

$5^x=7/\log \quad po(3)$

$\log 5^x=\log 7$

$x\log 5=\log 7$

$x=\frac{\log 7}{\log 5}$

$\underline{x\approx 1{,}2091}$