Poglavje II. RACIONALNE FUNKCIJE; ENAČBE IN NEENAČBE, str.30

Naloga 6b: Določi ničle, pole, asimptote in načrtaj približen graf funkcije $f(x)=\frac{2x+4}{x^2-2x+1}$

Rešitev	**Razlaga**
$f(x)=\frac{2x+4}{x^2-2x+1}$	Narisati je treba graf racionalne funkcije.
Približen graf	DEF.: Racionalna funkcija je vsak okrajšan kvocient dveh polinomov p(x) in q(x): $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ Standardni koraki za risanje racionalne funkcije so:
N: 2x + 4 = 0 2x = -4/:2 x = -2	**Ničle(N):** - Poiščem ničle funkcije: $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=0$, torej je $p(x)=0$
Ta ničla je lihe stopnje (1.st.)	- V ničlah lihe stopnje (na grafu jih označujemo kot križec) graf seka x os, oz. rečemo, da funkcija spremeni predznak. Ničle prve stopnje se imenujejo tudi enostavne ničle. - V sodih ničlah (na grafu jih označujemo s piko) pa se graf dotakne x os, oz. funkcija ne spremeni predznaka.

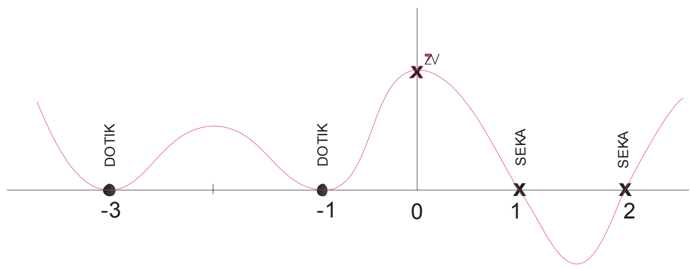
Primer: $p(x)=(x-1)(x+1)^2(x-2)^3(x+3)^4$

$x_1=1$ liha ničla (križec)

$x_{2,3}=-1$ soda ničla (pika)

$x_{4,5,6}=2$ liha ničla (križec)

$x_{7,8,9,10}=-3$ soda ničla (pika)



Določim še predznak začetne vrednosti ZV: $p(0)=(-)(+)(-)(+)>0$
Vidim, da je pozitivna in križec na y osi mi že pomaga določiti graf p(x).

P: $x^2-2x+1=0$

$(x-1)(x+1)=0$

$(x-1)^2=0$

$x-1=0$

$x_{1,2}=1$

To je sodi pol.

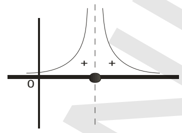
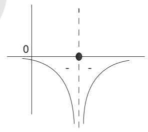
Poli (P):

Poiščem pole racionalne funkcije iz enačbe, ko je imenovalec funkcije enak 0: → q(x)=0

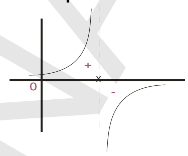
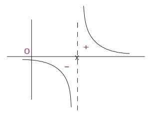
DEF.: Poli so točke na x osi, pri katerih funkcija ni definirana. Graf nikoli ne poteka skozi pol. V polu je VEDNO navpična asimptota.

DEF.: Navpična asimptota je premica v polu (rišem jo črtkano), katere se graf nikoli ne dotakne. Navpična asimptota ima enako enačbo kot pol.

Tudi poli so lahko lihe ali sode stopnje. V sodem polu (označim ga s točko) funkcija ohrani predznak oz. veji grafa »prihajata« iz leve in desne strani ob asimptoti v polu. Tu sta dve možnosti v odvisnosti od pozitivnega ali negativnega predznaka funkcije:

$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$  ali  $f(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$

V lihem polu funkcija spremeni predznak in veji grafa »prihajata« iz različnih strani ob navpični asimptoti v polu. Spet sta dve možnost:

$f(x)=\frac{1}{x-1}$  ali  $f(x)=-\frac{1}{x-1}$

A: st(p) = 1
st(q) = 2

st(p) < st(q)
1 < 2

Zato ima graf za simptoto x os ali drugače zapisano y = 0

A: Določimo poševno asimptoto

DEF.: Poševna asimptota je krivulja (premica, parabola,...), kateri se graf poljubno približa, vendar se je ne dotakne razen v posebnih primerih.

Imenujmo **st** stopnjo, ki je enaka največjemu eksponentu spremenljivke x.

Tu so tri možnosti:

(a) st(p) < st(q)   Tedaj je poševna asimptota <u>vedno</u> x os oz. y=0
(b) st(p) = st(q)
(c) st(p) > st(q)

Možnost (b) in (c) bomo obravnavali v drugih nalogah.

ZV:

$f(0)=\frac{2.0+4}{0-0+1}=4$

Torej graf seka y os v $P_y(0,4)$

Na grafu ni treba iskati dodatne točke. Kljub temu se lahko odločiš, da za kontrolo poiščeš dodatno točko npr. T, ki jo določa $f(-4)$:

Začetna vrednost (ZV)

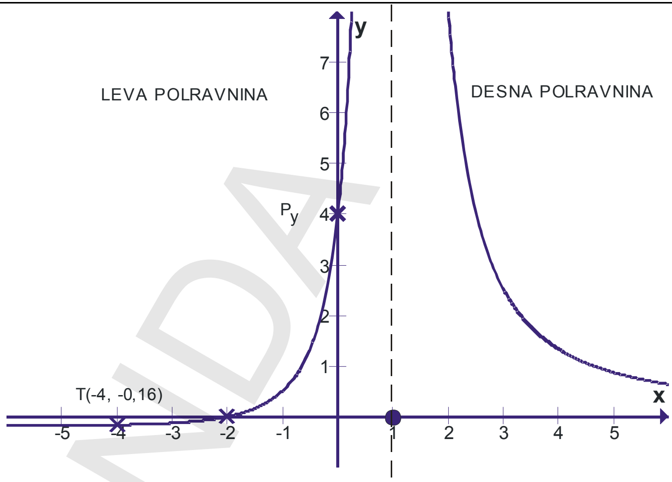
Izračunamo začetno vrednost funkcije (v njej graf seka y os).

$f(0)=\frac{p(0)}{q(0)}$

Začetna vrednost nam pomaga pri risanju grafa. Lahko se zgodi, da funkcija nima začetne vrednosti. To sta primera, ko ima funkcija pol ali ničlo ravno v x = 0. V teh dveh primerih si z ZV ne moremo pomagati pri risanju grafa. Tedaj moramo poiskati neko drugo točko T, ki leži na grafu $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, to je $T(x_0,\frac{p(x_0)}{q(x_0)})$.

$$T: f(-4)=\frac{2(-4)+4}{(-4)^2-2(-4)+1}=\frac{-8+4}{16+8+1}=\frac{-4}{25}=-0{,}16$$

Narišemo graf racionalne funkcije ob upoštevanju vsega, kar smo dobili po izračunih.

Izračuni	Komentar	GRAF
N: x = -2 (križec)	Liha stopnja	
P: $x_{1,2} = 1$ (točka)	Soda stopnja V polu je navpična asimptota z enačbo x = 1, ki pravokotni (Kartezijev) koordinatni sistem (RxR) razdeli na dva dela.	
A: y = 0 (x os)	Graf vedno seka vodoravno asimptoto v ničlah.	
ZV: f(0) = 4 $P_y(0,4)$		- Graf začnemo risati na tisti polravnini, kjer je ZV (leva polravnina).
$T(-4,-\frac{4}{25}=-0{,}16)$	Vrišem tudi točko T, čeprav v našem primeru ni nujna in služi le za za kontrolo.	- Asimptota vedno "privlači" krivuljo. Rišem od x = -2 skozi točko P_y do navpične asymptote v desno. Od x = -2 v levo pa rišem graf skozi točko T in se asimptotsko približujem x osi. - Drugo vejo začnem risati na desni polravnini zgoraj ob navpični asimptoti iz pozitivnega y navzdol in se asimptotsko približujemo x osi (vodoravni asimptoti).