

Naloga: 13: Napiši inverzne funkcije k navedenim funkcijam. Nariši grafe funkcij in njihovih inverznih funkcij.

Rešitev:

a) $y = -x + 1$

- inverzna funkcija
- graf funkcije
- graf inverzne funkcije

(1) zamenjam x in y: $x \leftrightarrow y$

$$x = -y + 1$$

(2) in spet izrazim y:

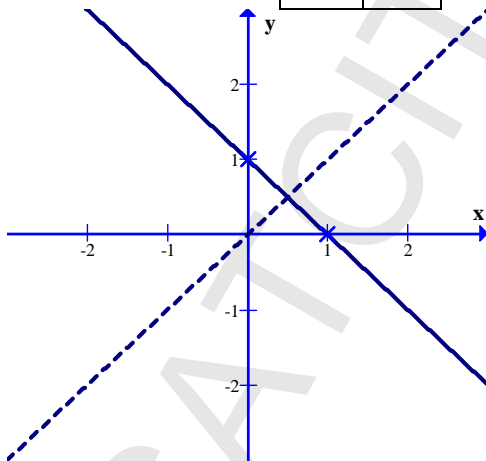
$y = -x + 1$ To je iskana inverzna funkcija

Narišem oba grafa v isti koordinatni sistem:

Prvotna funkcija in
 inverzna funkcija:

$$y = -x + 1$$

x	y
0	1
1	0



$y = x$ (simetrala lihih kvadrantov)

V našem primeru sta prvotna in inverzna funkcija enaki. Ker je graf prvotne funkcije premica, mora biti graf inverzne funkcije premica, ki je pravokotna na simetralo lihih kvadrantov.

Razlaga:

Izrek: $f(x)$ bijektivna funkcija \Leftrightarrow obstaja inverzna funkcija $f^{-1}(x)$

Postopek določanja inverzne funkcije je naslednji:

- (1) V prvotni funkciji zamenjam x in y
 $x \leftrightarrow y$
 in dobim
 $x = f(y)$
- (2) Iz te nove funkcije spet izrazim y in to je naša inverzna funkcija
 $y = f^{-1}(x)$

Uporabimo to na naši nalogi.

Grafa prvotne in inverzne funkcije se zrcalita preko simetrale lihih kvadrantov ($y = x$).

Če iščemo inverzno funkcijo k linearni funkciji, je to vedno linearna funkcija. Graf inverzne funkcije je tudi premica, ki zrcalno slika prvotno premico preko simetrale lihih kvadrantov.

b) $y = \frac{1}{2}x - 3$ (linearna funkcija)

- inverzna funkcija
- graf funkcije
- graf inverzne funkcije

(1) $x \leftrightarrow y$: $x = \frac{1}{2}y - 3/.2$

(2) Izrazim y iz (1): $2x = y - 6$

$y = 3x + 6$

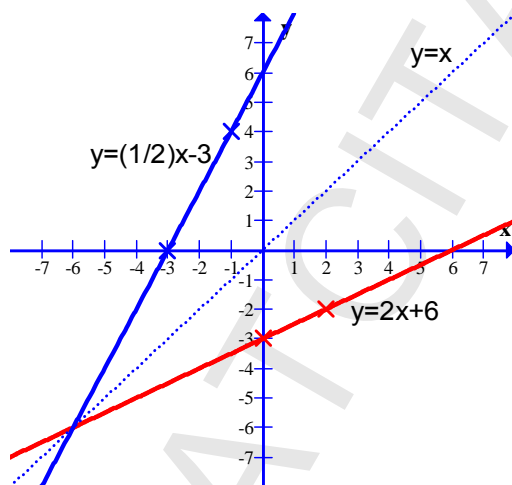
To je iskana inverzna funkcija. Obe narišemo v isti koordinatni sistem:

$y = \frac{1}{2}x - 3$

x	y
0	-3
2	-2

$y = 2x + 6$

x	y
-1	4
-3	0



c) $y = -x^3 + 1$

- inverzno funkcijo
- graf funkcije
- graf inverzne funkcije

(1) $x \leftrightarrow y$: $x = -y^3 + 1$

(2) Izrazim: $y^3 = -x + 1$

$y = \sqrt[3]{-x + 1}$

Primer: Poiščimo inverzno funkcijo k funkciji $y = x^3$ in narišimo obe funkciji:

(1) $x \leftrightarrow y$:

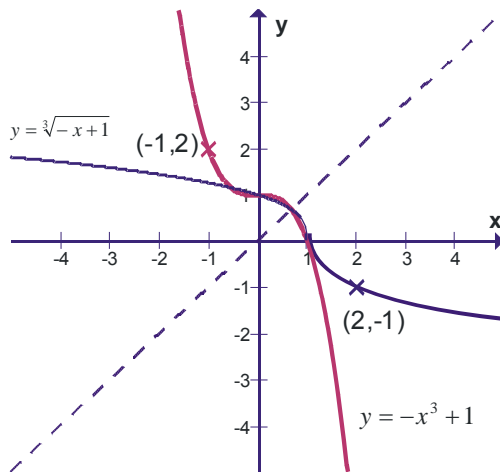
(2) Izrazim y: $y^3 = x$

$y = \sqrt[3]{x}$, da dobim inverzno funkcijo.

Ker vem, da sta $y = x^3$ in $y = \sqrt[3]{x}$ inverzni, lahko narišemo graf od $y = x^3$ in ga zrcalimo preko simetrale lihih

Za risanje grafov pa je bolj enostavno, če narišem najprej prvotno funkcijo

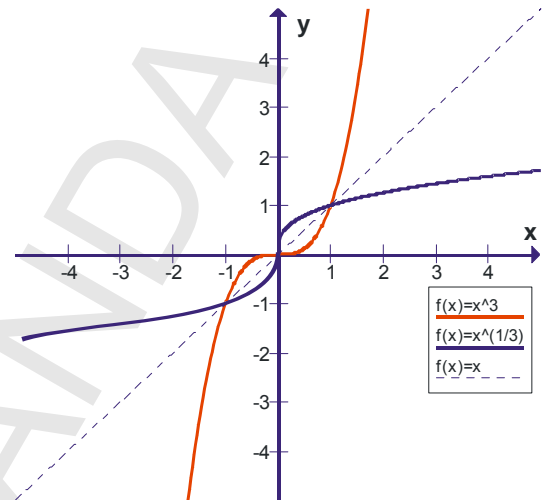
$y = -x^3 + 1$ in jo nato zrcalim preko simetrale lihih kvadrantov $y=x$:



kvadrantov, da dobimo graf inverzne funkcije:

$$y = \sqrt[3]{x}$$

\underline{x}	\underline{y}
0	1
1	0



Točke na simetrali so negibne, ostale zrcalim čez $y=x$ premico. Inverzno funkcijo najlepše vidimo, če postavimo zrcalo na $y=x$ premico in v njem vidimo inverzno funkcijo.

č) $y = -x^{-1}$

- inverzna funkcija
- graf funkcije
- graf inverzne funkcije

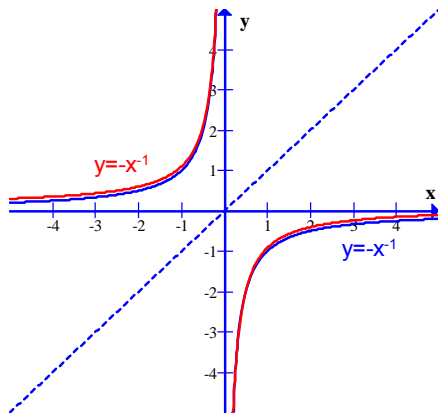
(1) $x \leftrightarrow y: \quad x = -y^{-1}$

(2) Izračunaj: $x = -\frac{1}{y}$ odnosno $y = -\frac{1}{x}$

Inverzna funkcija je $y = -x^{-1}$

Prvotna in inverzna funkcija imata enak predpis. Narišem grafa v isti koordinatni sitem:

Zadostuje, da narišem en graf:



d) $y = x^{\frac{1}{3}} + 2$

- inverzna funkcije
- graf prvotne funkcije
- graf inverzne funkcije

(1) $x \leftrightarrow y: \quad x = y^{\frac{1}{3}} + 2$

$$y^{\frac{1}{3}} = x - 2$$

$$\underline{y = (x - 2)^3}$$

Sedaj je bolj preprosto najprej narisati graf inverzne funkcije $y = (x - 2)^3$. Po tem pa zrcalim inverzno funkcijo preko simetrale lihih kvadrantov, da dobim prvotno funkcijo.

