Zbirka nalog za srednje šole: MATEMATIKA
O. Arnuš, V. Batagelj, A. Blaznik, B. Roblek, M. Strnad
POLINOMI. RACIONALNE FUNKCIJE. KRIVULJE II. REDA

Poglavje I.POLINOMI
8. Odvod polinoma in tangenta na graf
Str.20, naloga 101 a), č), e), g)

Naloga 101 Določi intervale, na katerih funkcija raste, in intervale, na katerih funkcija pada.

101 a) $p(x) = 2x^2 + 4x - 3$

č) $p(x) = x^3 - 12x + 5$

e) $p(x) = -2x^3 + 5x^2 + 4x + 7$

g) $p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

TEORIJA

Def.: Funkcija $f(x)$ je rastoča $\Leftrightarrow \; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$\Leftrightarrow \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$\Leftrightarrow$ za x-e, nad katerim gledam njen graf od leve proti desni navzgor

(*) $\Leftrightarrow \; f'(x) > 0$ (ko je njen prvi odvod pozitiven)

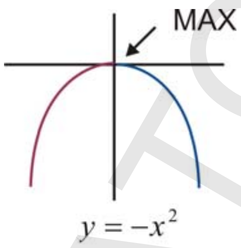
Def.: funkcija $f(x)$ je padajoča $\Leftrightarrow \; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$\Leftrightarrow \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

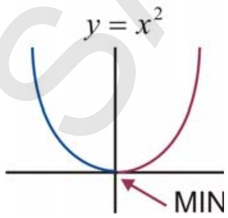
$\Leftrightarrow$ za x-e, nad katerim gledam njen graf od leve proti desni navzdol

(**) $\Leftrightarrow \; f'(x) < 0$ (ko je njen prvi odvod negativen)

Naraščanje (padanje) preide v padanje (naraščanje) v ekstremih.



V maksimumu preide funkcija iz naraščanja v padanje. Graf gledam od leve proti desni navzgor do maksimuma v izhodišču, kjer potem gledam graf of leve proti desni navzdol. Torej je funkcija padajoča.



V minimumu funkcija preide iz padanja v naraščanje.

Mi bomo reševali nalogo z odvodom. Seveda je v ta namen potrebno znati izračunati odvod polinoma.

101 a) $p(x)=2x^2+4x-3$

$p(x)$ raste?

$p(x)$ pada?

Spomnimo se, da je odvod funkcije

$f(x)=x^n$

enak $f'(x)=nx^{n-1}$.

Izračunam odvod: $p'(x)=4x+4$

Po (*) $p(x)$ raste $\Leftrightarrow$ $p'(x)>0$

$$4x+4>0$$
$$4x>-4$$
$$\underline{x>-1}$$

Torej polinom $p(x)$ raste na intervalu: $x\in(-1,\infty)$.

Po (**) $p(x)$ pada $\Leftrightarrow$ $p'(x)<0$

$$4x+4<0$$
$$4x<-4$$
$$\underline{x<-1}$$

Polinom pada za $x\in(-\infty,-1)$.

101 č) $p(x)=x^3-12x+5$

$p(x)$ raste?

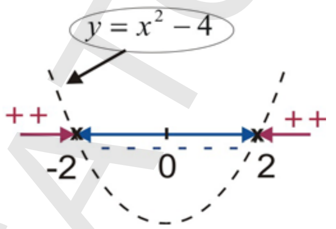
$p(x)$ pada?

Odvod: $p'(x)=3x^2-12$

Po (*) $p(x)$ raste $\Leftrightarrow$ $p'(x)>0$

$$3x^2-12>0\,/:3$$
$$x^2-4>0$$
$$(x-2)(x+2)>0$$

Rešim kvadratno neenačbo.
Glej naloge iz kvadratne neenačbe!



Ker je na označenih intervalih $(-\infty,-2)$ in $(2,\infty)$ prvi odvod polinoma pozitiven, to pomeni, da je na teh istih dveh intervalih polinom rastoča funkcija. Torej je rešitev: $x\in(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$.

Vidim, da je iz reševanja kvadratne neenačbe razvidno tudi, kje je prvi odvod negativen. Na tem intervalu je prvotni polnom padajoč. Torej pada za $x\in(-2,2)$.

101. e) $p(x) = -2x^3 + 5x^2 + 4x + 7$

$p(x)$ raste?

$p(x)$ pada?

Odvod: $p'(x) = -6x^2 + 10x + 4$

$p(x)$ raste $\Leftrightarrow$ $p'(x) > 0$

$$-6x^2 + 10x + 4 > 0 \,/\, (-1)$$

$$6x^2 - 10x - 4 < 0 \,/ :2$$

$$3x^2 - 5x - 2 < 0$$

$$3(x-2)(x+\frac{1}{3}) < 0 \,/ :3$$

$$(x-2)(x+\frac{1}{3}) < 0$$

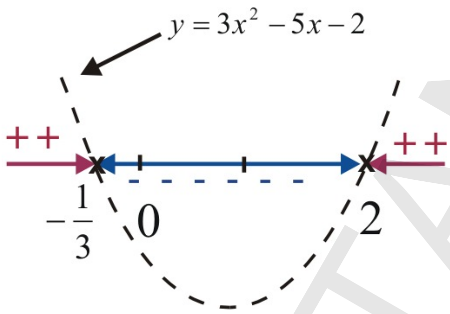
Glej reševanje kvadratnih neenačb!

$D = b^2 - 4ac$

$D = 25 + 24 = 49$

$\sqrt{D} = 7$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{6} \quad x_1 = \frac{12}{6} = 2, \quad x_2 = -\frac{1}{3}$$



Odčitam rezultat: $p(x)$ raste: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (2, \infty)$

$p(x)$ pada: $x \in \left(-\frac{1}{3}, \ 2\right)$

101. g) $p(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

$p(x)$ raste?

$p(x)$ pada?

Odvod: $p'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$$p(x) \text{ raste } \Leftrightarrow p'(x) > 0$$

$$12x^3 - 12x^2 - 24x > 0 / :12$$

$$x^3 - x^2 - 2x > 0$$

$$x(x^2 - x - 2) > 0$$

$$x(x-2)(x+1) > 0$$

Izpišem ničle pripadajoče funkcije prvega odvoda:
$p'(x) = x(x-2)(x+1)$

$x_1 = 0$ (x)
$x_2 = 2$ (x)
$x_3 = -1$ (x)

Vse so lihe stopnje, zato se v vseh spremeni preznak.

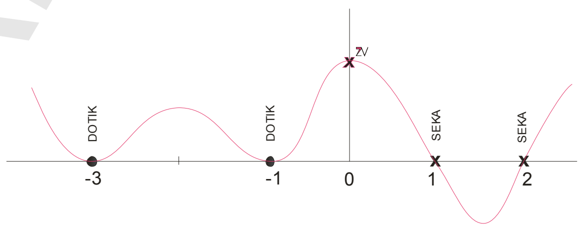
To je neenačba višje stopnje. Tu je treba vedeti, kdaj so ničle lihe oz. sode stopnje.

Ničle(N):
Imamo ničle sode in lihe stopnje.

- V ničlah lihe stopnje (na grafu jih označujemo kot križec) graf seka x os, oz. rečemo, da funkcija spremeni predznak. Ničle prve stopnje se imenujejo tudi enostavne ničle.
- V sodih ničlah (na grafu jih označujemo s piko) pa se graf dotakne x os, oz. funkcija ne spremeni predznaka.

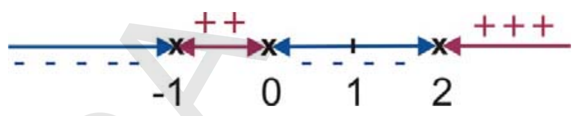
Primer:
$p(x) = (x-1)(x+1)^2(x-2)^3(x+3)^4$

$x_1 = 1$ liha ničla (križec)
$x_{2,3} = -1$ soda ničla (pika)
$x_{4,5,6} = 2$ liha ničla (križec)
$x_{7,8,9,10} = -3$ soda ničla (pika)



Določim še predznak začetne vrednosti ZV:
$p(0) = (-)(+)(-)(+) > 0$
Vidim, da je pozitivna in križec na y osi mi že pomaga določiti graf

Pomagam si z risanjem kot pri reševanju kvadratne neenačbe.



Najprej na enem izmed intervalov med ničlami ugotovim predznak. Vstavim recimo x=1 v $x(x-2)(x+1)$ in ugotovim, da je vrednost negativna (-) ($1.(1-2)(1+1) < 0$). Ker za $x = 1$ prvotni polinom pada, pada na celem intervalu $(0,\ 2)$. Potem levo v 0 in desno v 2 spremeni predznak v + in tako naprej levo v -1spet spremeni predznak v -. Torej na intervalih s + prvotni polinom raste, na intervalih z – pa pada.

Torej $p(x)$ raste za $x \in (-1,\ 0) \cup (2,\ \infty)$ in
$p(x)$ pada za $x \in (-\infty,\ -1) \cup (0,\ 2)$