Poglavje II. RACIONALNE FUNKCIJE; ENAČBE IN NEENAČBE

Stran 32, naloga 21 a), b), c) d); Reši racionalne neenačbe

21 a) $\frac{x+1}{1-x}>0$ b) $\frac{3}{x^2-4x-5}<0$

c) $\frac{x^2+8x-20}{x^2+1}>0$ d) $\frac{x^3-x^2-4x+4}{x+3}>0$

TEORIJA

Racionalne enačbe so oblike $\frac{p(x)}{q(x)}>0,\ \frac{p(x)}{q(x)}<0,\ \frac{p(x)}{q(x)}\geq 0,\ \frac{p(x)}{q(x)}\leq 0$, kjer sta $p(x)$ in $q(x)$ polinoma. Rešimo jih lahko na več načinov:

(1) Grafični način (glej tudi naloge iz grafov racionalnih funkcij)

Pri tem načinu narišem najprej racionalno funkcijo $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ ter iz grafa odčitamo x-e, kjer leži graf nad x osjo ($\frac{p(x)}{q(x)}>0$), pod x osjo ($\frac{p(x)}{q(x)}<0$), nad x osjo in zaradi enačaja dodamo še x-e, v katerih graf seka x os ($\frac{p(x)}{q(x)}\geq 0$), pod x osjo in zaradi enačaja dodamo še presečišče z x osjo ($\frac{p(x)}{q(x)}\leq 0$)

(2) Kombinacija grafičnega in računskega načina

Tu računam ničle, pole in začetno vrednost (ali vrednost v kaki točki) funkcije $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$. Potem na osnovi predznaka začetne vrednosti ali vrednosti v kaki točki določim predznake na intervalih med ničlami in poli (seveda ob upoštevanju lihosti in sodosti ničel in polov). Prednost pred grafičnim je v tem, da ni potrebno računati poševne asimptote.

(3) Računski način

Upoštevam, da velja $\frac{a}{b}>0 \Leftrightarrow ((a>0)\wedge(b>0))\vee((a<0)\wedge(b<0))$. Pri racionalnih enačbah torej velja:

$$\frac{p(x)}{q(x)}>0 \Leftrightarrow ((p(x)>0)\wedge(g(x)>0) \vee ((p(x)<0\wedge(g(x)<0)) \qquad \frac{(+)}{(+)}=(+),\ \frac{(-)}{(-)}=(+)$$

$$\frac{p(x)}{q(x)}<0 \Leftrightarrow ((p(x)>0)\wedge(g(x)<0) \vee ((p(x)<0\wedge(g(x)>0)) \qquad \frac{(+)}{(-)}=(-),\ \frac{(-)}{(+)}=(-)$$

$$\frac{p(x)}{q(x)}\le 0 \Leftrightarrow ((p(x)\ge 0)\wedge(g(x)<0) \vee ((p(x)\le 0\wedge(g(x)>0)) \qquad \frac{(+)}{(+)}=(+),\ \frac{(-)}{(-)}=(+)$$

$$\frac{0}{(-)}=0,\ \frac{0}{(+)}=0$$

$$\frac{p(x)}{q(x)}\ge 0 \Leftrightarrow ((p(x)\ge 0)\wedge(g(x)>0) \vee((p(x)\le 0\wedge(g(x)<0)) \qquad \frac{(+)}{(+)}=(+),\ \frac{(-)}{(-)}=(+)$$

$$\frac{0}{(+)}=0,\ \frac{0}{(-)}=0$$

Rešitev:

21 a) $\frac{x+1}{1-x}>0$

Reši racionalno neenačbo

Odločim se za reševanje na grafični način (1). V ta namen narišem graf funkcije $f(x)=\frac{x+1}{1-x}$ in zapišem interval na x osi (kjer graf leži nad x osjo).

N: $x+1=0$

$x=-1$ (liha ničla)

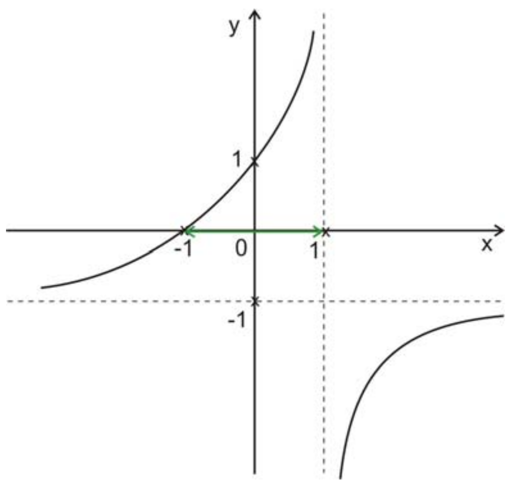
P: $1-x=0$

$+x=+1$ (lihi pol)

A: $y=1$

ZV: $f(0)=-1$

Rešitev $\underline{x\in(-1,1)}$



21 b) $\frac{3}{x^2-4x-5}<0$

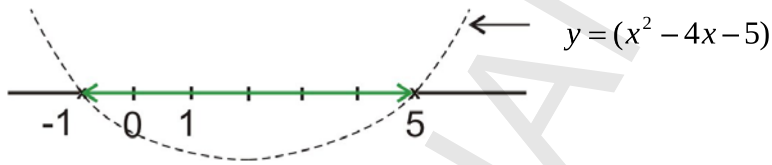
Reši racionalno neenačbo

Ker je števec vedno pozitiven, mora biti imenovalec (x^2-4x-5) vedno negativen. Za reševanje te neenačbe je najprimernejši računski (3) način za prvi del, potem pa rešujemo še po kombinaciji grafičnega in računskega načina (2).

$(x^2-4x-5)<0$

$(x-5)(x+1)<0$ Razstavim (glej kvadratne neenačbe)

$x_1=-5 \qquad x_2=-1$



Rešitev: $\underline{x\in(-1,\ 5)}$

21 c) $\frac{x^2+8x-20}{x^2+1}>0$

Reši racionalno neenačbo

To nalogo rešim na (2) način – kombinacija grafični in računski način:

Izračunam ničle, pole, začetne vrednosti (ali pa vrednosti na katerikoli točki na x osi med ničlami in poli funkcije $f(x)=\frac{x^2+8x-20}{x^2+1}$

N: $x^2+8x-20=0$

$2\,.\,10$

$(x-2)(x+10)=0$

$x_1=2$ (liha) – spremeni predznak

$x_2=-10$ (liha) – spremeni predznak

P: $x^2+1=0$

Ni realnih rešitev $\Rightarrow$ ni polov

ZV: $f(0)=-20$

Narišem številsko os (x os), na kateri označim ničle s križci, ker so lihe. Polov ni, zato jih ni treba upoštevati. Pod nič naredim **-** , ker je v x=0 vrednost negativna.

Ta predznak ostane do prve ničle desno od 0 in do prve ničle levo od 0. V obeh ničlah se potem zaradi lihosti spremeni predznak. Nad x os prepišem + v obe smeri.

Izpišem rešitev. To sta intervala, nad katerim so plusi (+).

Rešitev: $\underline{x \in (-\infty,\ -10) \cup (2,\ \infty)}$

21 d) $\dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x+3} > 0$

Reši racionalno neenačbo

Nalogo rešim v kombinaciji računskega in grafičnega načina (2). Poiščim ničle, pole, začetno vrednost funkcije: $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x+3}$

N: $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ Razstavim z izpostavljanjem.

$x^2(x-1) - 4(x-1) = 0$

$(x-1)(x^2-4) = 0$

$x - 1 = 0$

$x_1 = 1$ (liha)

$x^2 - 4 = 0$

$(x-2)(x+2) = 0$

$x_2 = 2$ (liha)

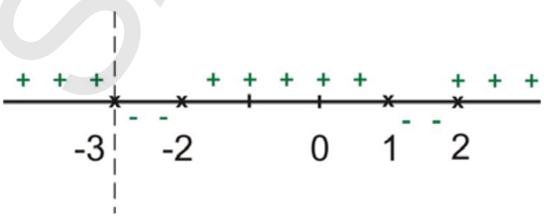
$x_3 = -2$ (liha)

P: $x + 3 = 0$

$x = -3$ (lihi)

ZV: $f(0) = \dfrac{4}{3} > 0$

Do rešitev pridem s pomočjo ničel, polov in predznaka v x=0. V polih si črtkano nakažem navpično asimptoto.



Rešitev: $\underline{x \in (-\infty,\ -3) \cup (2,\ 1) \cup (2,\ \infty)}$