Zbirka nalog za srednje šole: MATEMATIKA

A. Cokan, I. Štalec: ZAPOREDJA, DIFERENCIALNI IN INTEGRALNI RAČUN
Poglavje I.: ZAPOREDJA
Točka 2: Aritmetično in geometrijsko zaporedje.
A Aritmetično zaporedje

Stran 8, naloga 2. Za kateri x je dano zaporedje aritmetično?

a) $a+x,\quad \frac{3a}{2}-\frac{x}{2},\quad a$ b) $x+5,\quad 25-x,\quad 30+2x$

c) $\log 2,\quad \log(2^x-1),\quad \log(2^x+3)$

RAZLAGA:
Preden se lotim te naloge moram najprej vedeti vsaj dve definciji: kaj je zaporedje in kdaj je zaporedje aritmetično.

Def.: Zaporedje je funkcija, ki preslika množico naravnih števil $\mathbb{N}$ v množico realnih števil $\mathbb{R}$:
f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{N}=\{1,2,3...\}$
Zaporedje je naravna funkcija realne spremenljivke
f: $n \mapsto a_n$
ali $a_n = f(n)$
Ker je $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ je graf zaporedje $a_n = f(n)$ podmnožica grafa realne funkcije realne spremenljivke $a_n = f(n)$ Graf zaporedja se imenuje DISKRETNA množica točk.

Primer:

ZAPOREDJE ali
NARAVNA FUNKCIJA
REALNE SPREMENLJIVKE

f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$ali$$

$$f(n) = \frac{1}{n}$$

REALNE FUNKCIJE
REALNE SPREMENLJIVKE

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$ali$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Narišem graf obeh funkcij:

n=1; $a_1 = \frac{1}{1}$ 1. člen zaporeja

n=1;. $a_2 = \frac{1}{2}$ 2. člen zaporeja

n=3; $a_3 = \frac{1}{3}$ 3. člen zaporedja

n=4; $a_4 = \frac{1}{4}$ 4. člen zaporedja

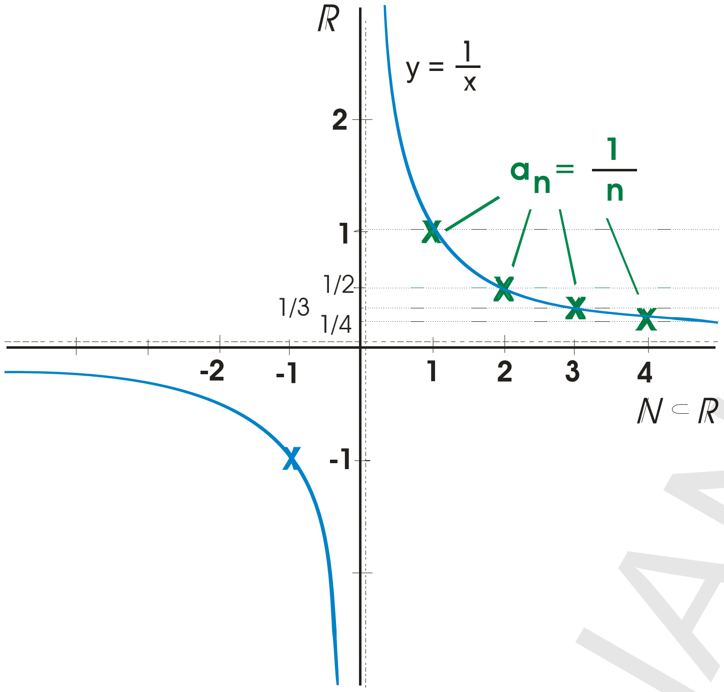
n=n; $a_n = \frac{1}{n}$ splošni člen zaporedja

Ta funkcija je racionalna funkcija.

Poiščem
Ničle: jih ni
Pole: x=0
Asimptote: y os
Točko: T(1, 1)

(glej nalogo iz racionalnih funkcij)

Oba grafa narišem v isti koordinatni sistem.



Vidim, kako malo je zelenih križcev na modrem grafu. Zeleni križci predstavljajo graf zaporedja in vidim, da vse slike ležijo na grafu pripadajoče realne funkcije.

Sedaj pa narišem graf zaporedja še posebej:

$$a_1 = 1$$

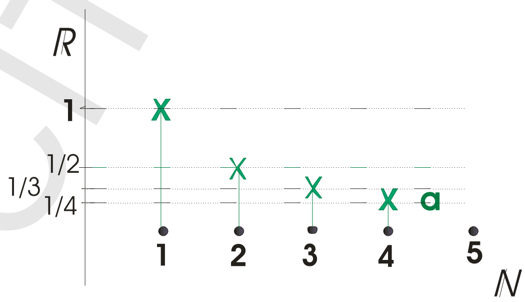
$$a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{4}$$

...

$$a_n = \frac{1}{n}$$



Def.: Zaporedje a_n je aritmetično, kadar je razlika sosednjih zaporednih točk konstantna.
Naj bodo a_1, a_2, a_3, ... a_n, a_{n+1} členi zaporedja.
Da bo to zaporedje aritmetično, mora veljati

$a_{n+1} - a_n$ = konstanta

in jo označim z d (kot diferenca). Torej:

$$a_{n+1} - a_n = d$$

Velja tudi, da je $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ $(= d)$, kar uporabim pri nalogi, kjer so podani trije členi in je potrebno izračunati neznanko. To je tudi naša naloga.

REŠITEV:

2 a) $a + x, \quad \frac{3a}{2} - \frac{x}{2}, \quad a$

$x =$ tako, da bo zaporedje aritmetično

$$a_1 = a + x$$
$$a_2 = \frac{3a}{2} - \frac{x}{2}$$
$$a_3 = a$$

Ker je zanano, da ti trije členi tvorijo aritmetično zaporedje (AZ), lahko uporabim formulo iz razlage:

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

$$\frac{3a}{2} - \frac{x}{2} - (a + x) = a - \left(\frac{3a}{2} - \frac{x}{2}\right)$$ in rešim enačbo

$$\frac{3a}{2} - \frac{x}{2} - a - x = a - \frac{3a}{2} + \frac{x}{2} \, / .2$$
$$3a - x - 2a - 2x = 2a - 3a + x$$
$$a - 3x = -a + x$$
$$+4x = +2a \, / :2$$
$$2x = a$$
$$\underline{x = \frac{a}{2}}$$

Členi a_1, a_2, a_3 tvorijo torej aritmetično zaporedje AZ za $x = \frac{a}{2}$.

Zapišem še člene:

$$a_1 = a + x = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$$
$$a_2 = \frac{3a}{2} - \frac{x}{2} = \frac{3a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{6a - a}{4} = \frac{5a}{4}$$
$$a_3 = a$$

Izračunam tudi d:

$$d = a - \frac{5a}{4} = \frac{5a}{4} - \frac{3a}{2} = -\frac{a}{4}$$

2 b) $x+5, \quad 25-x, \quad 30+2x$

$x =$ tako, da bo zaporedje aritmetično

Označim:

$a_1 = x+5$

$a_2 = 25-x$

$a_3 = 30+2x$

in uporabim formulo iz razlage:

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

$$25-x-(x+5) = 30+2x-(25-x)$$
$$25-x-x-5 = 30+2x-25+x$$
$$20-2x = 5+3x$$
$$-5x = -15$$
$$\underline{x = 3}$$

Izpišem še člene:

$a_1 = 3+5 = 8$

$a_2 = 25-3 = 22$

$a_3 = 30+6 = 36$

in izračunam diferenco d:

$d = 36-22 = 22-8 = 14$

2 c) $\log 2, \quad \log(2^x - 1), \quad \log(2^x + 3)$

$x =$ tako, da bo zaporedje aritmetično

Označim:

$a_1 = \log 2$

$a_2 = \log(2^x - 1)$

$a_3 = \log(2^x + 3)$

in ponovim pravila za računanje z logaritmi

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (x\,y)$$
$$\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$$
$$\log_a x^n = n \log_a x$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$

ter uporabim formulo iz razlage:

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

$$\log(2^x-1)-\log 2=\log(2^x+3)-\log(2^x-1)$$

$$\log\frac{2^x-1}{2}=\log\frac{2^x+3}{2^x-1} / anti\log$$

$$\frac{2^x-1}{2}=\frac{2^x+3}{2^x-1}$$

$$(2^x-1)(2^x-1)=2(2^x+3)$$

$$2^{2x}-2.2^x+1=2.2^x+6$$

$$2^{2x}-2.2^x+1-2.2^x-6=0$$

$$2^{2x}-4.2^x-5=0$$

Vpeljem novo neznanko (glej eksponentne enačbe)

$$2^x=t$$

$$t^2-4t-5=0$$

Rešim po Viètu:

$$(t-5)(t+1)=0$$

$\underline{t_1=5}$ $\underline{t_2=-1}$

in vstavim v $2^x=t$:

$2^x=5 / \log_{10}$

To enačbo rešim z logaritmiranjem pri osnovi 10:

$$\log 2^x=\log 5$$

$$x\log 2=\log 5$$

$$\underline{x=\frac{\log 5}{\log 2}}$$

$2^x=-1$

Ni rešitve, ker je $2^x>0$, kar vidim tudi iz grafa funkcije $f(x)=2^x$ in $g(x)=-1$.