Zbirka nalog za srednje šole: MATEMATIKA

Aleksander Cokan, Jože Andrej Čibej: ZAPOREDJA
Poglavje I.: ZAPOREDJA
Točka 4: Geometrijsko zaporedje.

Stran 23, naloga 7. Za kakšen x je dano končno zaporedje geometrijsko?
a) $x,\ x+5,\ x+15$ b) $x+1,\ 2x,\ 3x$
c) $2x-30,\ x+25,\ x-5$

RAZLAGA:
Preden se lotim te naloge moram najprej vedeti vsaj dve definciji: kaj je zaporedje in kdaj je zaporedje aritmetično.

Def.: Zaporedje je funkcija, ki preslika množico naravnih števil $\mathbb{N}$ v množico realnih števil $\mathbb{R}$:
f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{N} = \{1,2,3...\}$
Zaporedje je naravna funkcija realne spremenljivke
f: $n \mapsto a_n$
ali $a_n = f(n)$
Ker je $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ je graf zaporedje $a_n = f(n)$ podmnožica grafa realne funkcije realne spremennljivke $a_n = f(n)$ Graf zaporedja se imenuje DISKRETNA množica točk.

Primer:

ZAPOREDJE ali
NARAVNA FUNKCIJA
REALNE SPREMENLJIVKE

f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

ali

$$f(n) = \frac{1}{n}$$

REALNE FUNKCIJE
REALNE SPREMENLJIVKE

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y = \frac{1}{x}$$

ali

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Narišem graf obeh funkcij:

n=1; $a_1 = \frac{1}{1}$ 1. člen zaporeja

n=1;. $a_2 = \frac{1}{2}$ 2. člen zaporeja

n=3; $a_3 = \frac{1}{3}$ 3. člen zaporedja

n=4; $a_4 = \frac{1}{4}$ 4. člen zaporedja

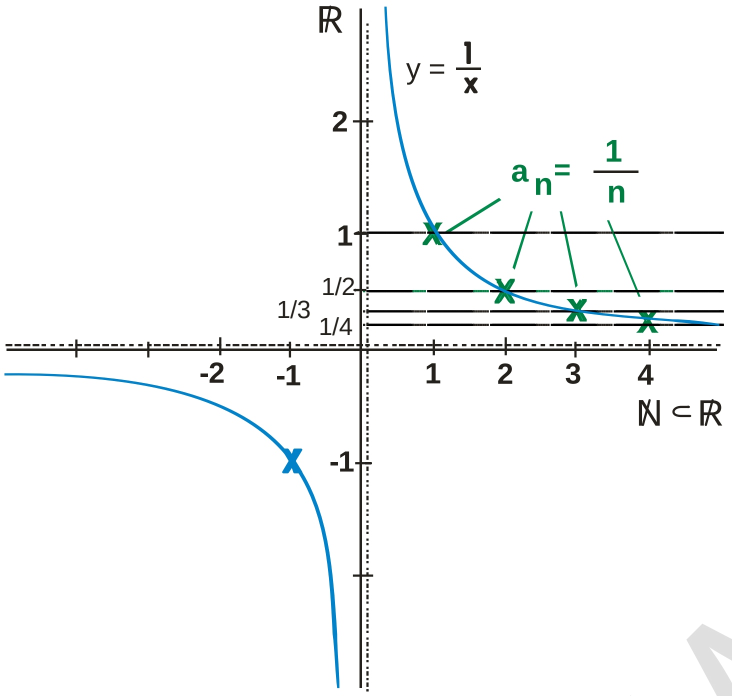
n=n; $a_n = \frac{1}{n}$ splošni člen zaporedja

Ta funkcija je racionalna funkcija.

Poiščem
Ničle: jih ni
Pole: x=0
Asimptote: y os
Točko: T(1, 1)

(glej nalogo iz racionalnih funkcij)

Oba grafa narišem v isti koordinatni sistem.



Vidim, kako malo je zelenih križcev na modrem grafu. Zeleni križci predstavljajo graf zaporedja in vidim, da vse slike ležijo na grafu pripadajoče realne funkcije.

Sedaj pa narišem graf zaporedja še posebej:

$$a_1 = 1$$

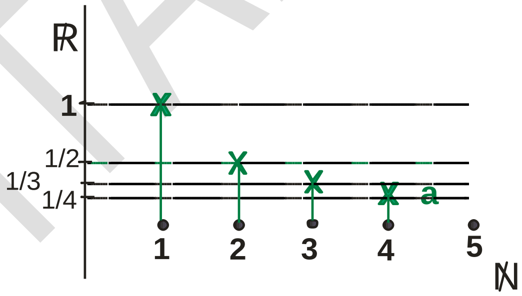
$$a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{4}$$

...

$$a_n = \frac{1}{n}$$



Def.: Zaporedje a_n je geometrijsko zaporedje (GZ), kadar kvocient sosednjih členov $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ konstanten.
Naj bodo a_1, a_2, a_3, ... a_n, a_{n+1} členi zaporedja.
Da bo to zaporedje GZ, mora veljati

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = konstanta$$

in jo označim z k (ali q). Torej:

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = k}$$

Velja tudi, daje $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = (k)$,
kar uporabim pri nalogi, kjer so podani trije členi in je potrebno izračunati neznanko. To je tudi naša naloga.

REŠITEV:

7 a) $\underline{x, \ x+5, \ \ x+15}$

$x = ?$

Tako, da bo zaporedje geometrijsko.

$a_1 = x$
$a_2 = x + 5$
$a_3 = x + 15$

Vpeljimo formule:

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$

$\frac{x+5}{x} = \frac{x+15}{x+5}$

$(x+5)^2 = x(x+15)$

$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 15x$

$-5x = -25$

$\underline{\underline{x = 5}}$

Zapišemo še člene zaporedja:

$5, \ \ 10, \ \ 20$

In preverimo, če je GZ:

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{5} = 2$

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{20}{10} = 2$

$k = 2$

Zaporedje je geometrijsko za x=5, kar je bilo treba pokazati.

7 b) $\underline{x+1, \ \ 2x, \ \ 3x}$

$x = ?$ da bo zaporedje geometrijsko

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$

$\frac{2x}{x+1} = \frac{3x}{2x}$

$\frac{2x}{x+1} = \frac{3}{2}$

$4x = 3(x+1)$

$4x = 3x + 3$

$\underline{\underline{x = 3}}$

Zapišem zaporedje:

$4, \ \ 6, \ \ 9$

$k = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

7 c) $\underline{2x-30,\ \ x+25,\ \ x-5}$

$x=?$

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$

$\frac{x+25}{2x-30}=\frac{x-5}{x+25}$

$(x+25)^2=(x-5)(2x-30)$

$x^2+50x+625=2x^2-30x-10x+150$

$x^2-90x-475=0$

$x_{1,2}=\frac{90\pm100}{2}$

$\underline{\underline{x_1=95}}$

$\underline{\underline{x_2=-5}}$

Členi zaporedja:

$160,\ \ 120,\ \ 90;\quad k=\frac{3}{4}$

$-40,\ \ 20,\ \ -10;\quad k=-\frac{1}{2}$

$D=b^2-4ac$

$D=90^2+4.475$

$D=10\,000$

$\sqrt{D}=100$